편미분 방정식

1. 상미분과 편미분

독립변수가 하나면 상미분, 두 개 이상이면 편미분

독립변수가 2 개 이상인 함수의 독립변수 하나(또는 둘 이상)에 대한 도함수로 이때 다른 변수는 상수로 취급한다.

$\mathrm{u} = \mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t})$ *이라면 즉, 공간요소 x와 시간 t의 두 독립변수의 함수인 u에 대해*

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}$$

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x,t+h)-u(x,t)}{h}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \lim_{h\to 0}\frac{u_x(x+h,t)-u_x(x,t)}{h}$$

$$u_{xt} = u_{tx} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \lim_{h\to 0}\frac{u_x(x,t+h)-u_x(x,t)}{h}$$

편미분 예)

$$\mathrm{u} = \mathrm{x}^2 y + sinx$$

$$\mathrm{u_x} = 2\mathrm{xy} + \mathrm{cosx}, \quad \mathrm{u_y} = x^2, \quad u_{xy} = u_{yx} = 2x$$

편미분(편도함수) 표시(Notation)

$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow Partial\ derivative\ of\ u\ with\ respect\ to\ x$(*$x$에 대한 u의 편도함수*)

Del u over del x, Round d u over round d x, del u del x

$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow Second\ partial\ derivative\ of\ u\ with\ respect\ to\ x$(*$x$에 대한 u의 2계편도함수*)

Partial square u (over, by) x square,

Del u square over del x square, Round d square over round d x square

2. 편미분 방정식

다변수 함수와 편미분 함수가 들어간 (방정)식.

$$f\left(x_1, x_2, x_3, \dots x_n, u, u_{x1}, u_{x2}, \dots, u_{xn}, u_{x_1x_1}, \dots, u_{x_1x_n}\ , \dots\right) = 0$$

(상미분방정식은 단일 변수와 이 도함수로 된 함수가 포함된 식으로 되어 있다)

2계 편미분방정식 예

$$\mathrm{k}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad u(x,t), \qquad 1\text{차원 열 방정식}$$

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad u(x,t), \qquad 1\text{차원 파동 방정식}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad u(x,y), \qquad 2\text{차원 라플라스 방정식}$$

가장 단순한 형태의 2계 편미분식으로 중요하고 잘 알려져 있다.

3. 편미분식 풀이(변수분리)

상미분식에서도 유용한 풀이인 변수분리 방법을 알아본다.

u(x, y) = X(x)•Y(y)

이를 사용하여 편미분식을 풀면 상미분식 2 개가 나온다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = XY', \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = XY''$$

예제 1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$

(풀이)

u(x, y) = X(x)•T(t) 로 편미분식을 치환하면

X″T = XT′, 양변을 XT로 나누어

$$\frac{\mathrm{X}''}{X} = \frac{T'}{T}$$

왼쪽 항은 변수 t와 관계 없는(독립적인) x만의 함수(식)이고 오른쪽 항도 마찬가지이다.

양쪽 항이 모두 x와 t에 독립적인 항(함수식)이며 따라서 이는 상수가 된다.

$$\frac{\mathrm{X}''}{X} = \frac{T'}{T} = k$$

다음의 2개의 선형 상미분식이 나온다.

$X'' - kX = 0, \quad T' - kT = 0$

$T' - kT = 0, \int \frac{dT}{T} = \int k\,dt, T = Ce^{kT}$

$X'' - kX = 0$에서 특성방정식 $\lambda = \pm\sqrt{k}$으로 $X = C_1 e^{\sqrt{k}} + C_2 e^{-\sqrt{k}}$

이 경우 k는 영 또는 양수, 음수의 3 경우로 나뉘어 생각해야 한다.

i) $k = 0$이면 하나의 중근으로 $X = C_1 + C_2 x, T = C_3$

$u = XT = (C_1 + C_2 x)C = A + Bx$

ii) $k > 0$이면 두 실근으로 $X = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}, \quad T = C_3 e^{kt}$

$u = \left(C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}\right)C_3 e^{kt} = Ae^{kt+\sqrt{k}x} + Be^{kt-\sqrt{k}x}$

iii) $k < 0$이면 두 허근으로 $X = C_1 \cos\sqrt{-k}x + C_2 \sin\sqrt{-k}x, \quad T = C_3 e^{kt}$

$u = \left(C_1 \cos\sqrt{-k}x + C_2 \sin\sqrt{-k}\,x\right)C_3 e^{kt} = Ae^{kt}\cos\sqrt{-k}x + Be^{kt}\sin\sqrt{-k}x$

경계값과 초기값(BVC + IC)

위의 열전도 편미분식으로 보고 t를 시간 t로 바꾸어 본다.

u(0,t) = 0, u(L,t) = 0

u(x,0) = f(x)

i) $k = 0$이면 $u(0,t) = 0$에서 $A = 0, u(L,t) = 0$에서 $A + BL = 0, B = 0$

이 결과는 자명한 해가 없다(즉, 의미 없음). 따라서 k≠0

ii) $k > 0$이면 $X(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}$이고 $X(0) = X(L) = 0$이므로

$$C_1 + C_2 = 0, C_2 = -C_1$$

$$C_1 e^{\sqrt{k}L} + C_2 e^{-\sqrt{k}L} = 0$$

$$C_1\left(e^{\sqrt{k}L}-e^{-\sqrt{k}L}\right)=0, C_1=0, C_2=0$$

이 결과도 의미 없고 따라서 k<0

iii) $k<0$이면 $X=C_1\cos\sqrt{-k}x+C_2\sin\sqrt{-k}x, X(0)=X(L)=0$

$$C_1\cos 0=0, C_1=0, C_1\cos\sqrt{-k}L+C_2\sin\sqrt{-k}L=0$$

$$\sin\sqrt{-k}L=0, \sqrt{-k}=\frac{n\pi}{L}, k=-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, (n=1,2,3,\dots)$$

$$X_n(x)=C_2\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u(x,t)=X(x)T(t)=C_3e^{kt}C_2\sin\sqrt{-k}x=c_nc_ne^{-(\frac{n\pi}{L})^2t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{-(\frac{n\pi}{L})^2t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

초기(값)조건에서 u(x,0) = f(x)

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=f(x), \qquad 0<x<L$$

$$c_n=\frac{2}{L}\int_0^{\infty}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

중첩 원리(Superposition Principle)

동차 선형 편미분식에서 $u_1, u_2, \dots, u_k$가 모두 해라면 이들의 선형 조합인

$u=c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_ku_k$도 해이다.

$$u(x,t)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right)e^{-(\frac{n\pi}{n})^2t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(상수 c_n 구하기)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\rightarrow f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

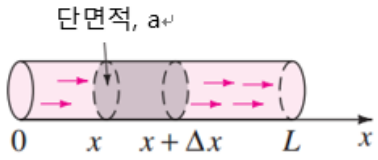
$$\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx=\int_{-L}^{L}\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx=c_nL$$

$$c_n=\frac{2}{L}\int_0^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \int_{0}^{L}\left[\cos\frac{\pi x}{L}(n-m) - \cos\frac{\pi x}{L}(n+m)\right]dx$$

$$= \left[\frac{L}{(n-m)\pi}\sin\frac{\pi x}{L}(n-m) - \frac{L}{(n+m)\pi}sin\frac{\pi x}{L}(n+m)\right]_0^L = \begin{cases} \boldsymbol{L}\ (\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}) \\ 0\ (m\neq n) \end{cases}$$

4. 1차원 열전달 식



(1) u(x,t)에서의 열전달양

$$H_{x,t} = -ka\frac{\partial u}{\partial x}$$

(2) u(x,t+Δt)에서의 열전달양

$$H_{x,t+\Delta t} = -ka\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\left(-ka\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta t$$

(3) u(x+Δx,t)에서의 열전달양

$$H_{x+\Delta x,t} = -ka\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-ka\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x$$

(4) u(x+Δx,t+Δt)에서의 열전달양

$$H_{x+\Delta x,t+\Delta t} = -ka\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-ka\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{\partial}{\partial t}\left(-ka\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-ka\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x\right)\Delta t$$

시간 Δt 동안의 열 입출력을 정리하여 이 시간 동안의 평균(x와 x+Δx) 열 축적 양을 확인하면, Q = [(1)+(2)]/2 – [(3)+(4)]/2 가 된다.

$$\mathrm{Q}(\Delta x, \Delta t) = \rho C_p a\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t\Delta x$$

$$= \left\{-ka\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-ka\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta t\right\}\Delta t$$

$$-\left[-ka\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-ka\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{-ka\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-ka\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x\right\}\Delta t\right]\Delta t$$

$$\rho C_p a\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t\Delta x = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-ka\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}\left(-ka\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x\Delta t\right]\Delta t$$

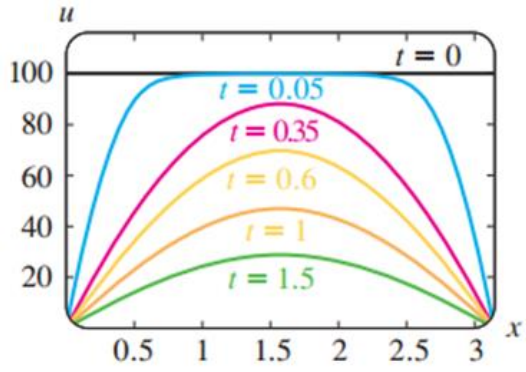
이제 양변을 a, Δx, Δt로 나누어 정리하면,

$$\rho C_p \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}k\frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial t}\Delta t$$

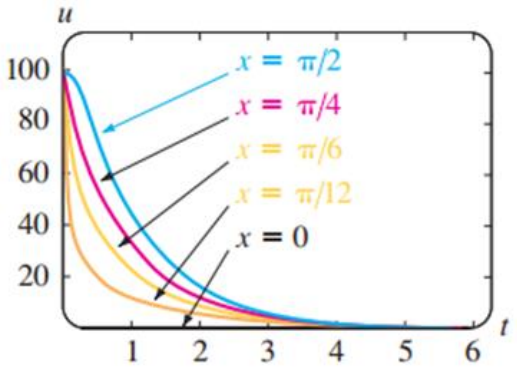
Δt→0 의 극한을 취하면 1/2[ ]Δt 항은 지워지고

$$\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad or \quad \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$(\text{예제 } 2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, u(0,t) = u(\pi, t) = 0, u(x,0) = 100$$



(a) $u(x, t)$ graphed as a function of x for various fixed times



(b) $u(x, t)$ graphed as a function of t for various fixed positions

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 100\sin(nx)\,dx = \frac{200}{\pi}\left(\frac{1}{n}(-\cos nx)\right]_0^\pi\right) = \frac{200}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{200}{n\pi}(1-(-1)^n)e^{-n^2 t}\sin(nx)$$

$$u_1(x,t)(n=1) = \frac{200}{\pi}e^{-1^2 t}\sin(x), u_3(n=3)\frac{200}{3\pi}e^{-3^2 t}\sin(3x), \ldots$$

2항과 1항의 비 $r = \frac{e^{-9t}}{e^{-1t}}\frac{|\sin 3x|}{|3\sin x|}$ $(|\sin n\pi| \le |n\sin\pi|)$

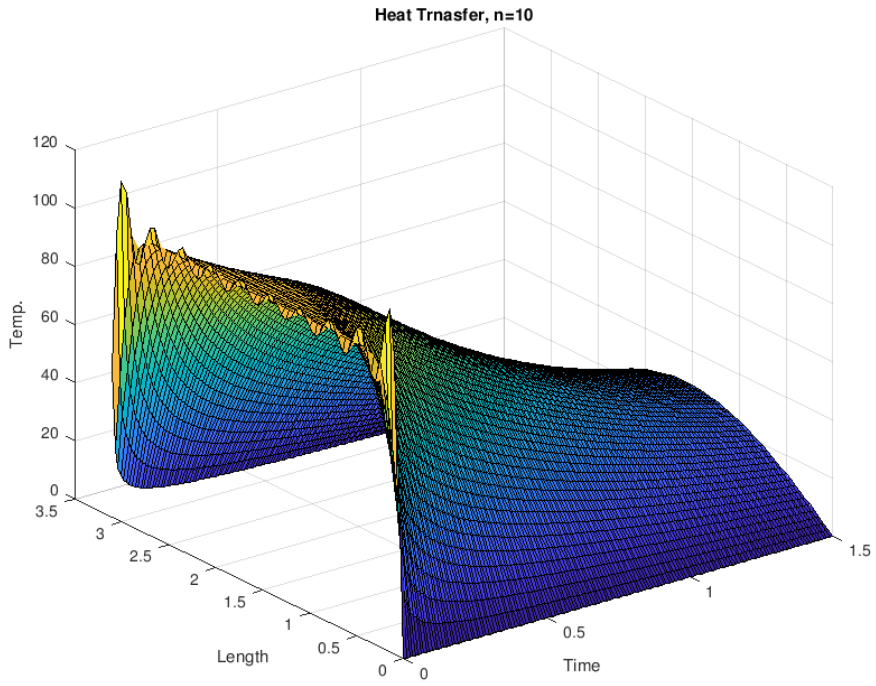
$\le e^{-8t}$

$\le e^{-8}$ $(t \ge 1$ 범위에서는)

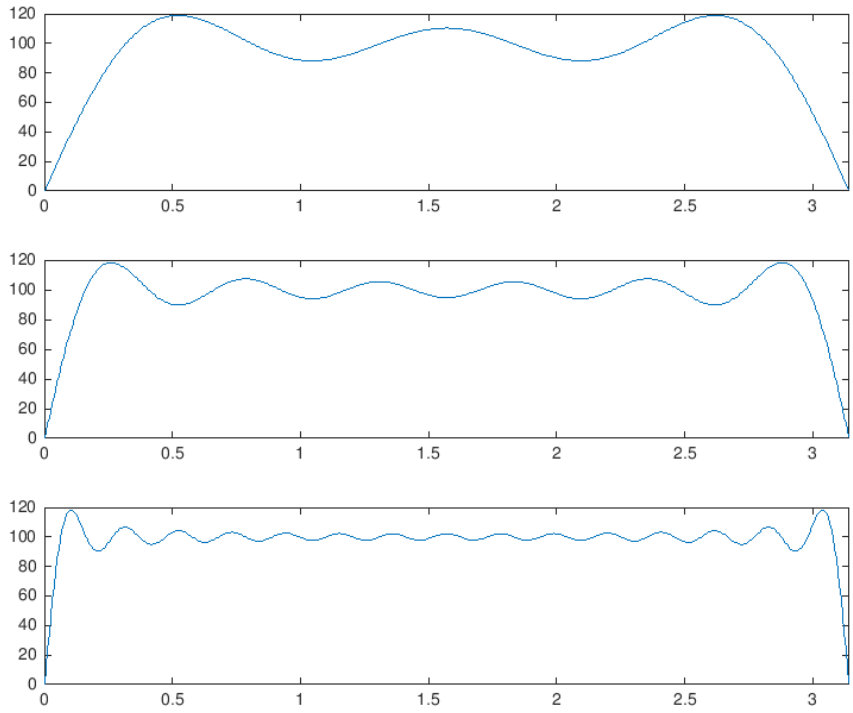
≤ 0.000335 $(r \le 0.1, t = 0.3)$

$$u(x,t) \approx \frac{200}{\pi}e^{-t}\sin(x)$$

길이와 시간에 따른 온도 변화(n=10)



t=0, n=3, 5, 15 일 때의 온도 분포(푸리에 급수, Fourier series)



(예제 3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, u(0,t) = u(\pi, t) = 0, u(x,0) = 100$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(\pi x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 100\int_0^1 \sin(\pi x)\sin(n\pi x)\,dx = \begin{cases}1\ (n=1)\\ 0\ (n\neq 2)\end{cases}$$

$$\sin(\pi x)\sin(n\pi x) = \frac{1}{2}(\cos(\pi - n\pi)x - \cos(\pi + n\pi)x)$$

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 100e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$$

푸리에 급수(Fourier Series) : 주기함수를 삼각함수 합의 무한 급수로 표현

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

전자공학, 진동 해석, 음향학, 광학, 신호처리와 화상처리, 데이터 압축 등에 쓰인다. 천문학에서는 분광기를 통해 별빛의 주파수를 분해하여 별을 이루는 화학 물질을 알아내는 데 쓰이고, 통신 공학에서는 전송해야 하는 데이터 신호의 스펙트럼을 이용하여 통신 시스템 설계를 최적화하는 데 쓰인다.

2017-11-29, 곽노태